Peut-on se passer des variables continues en physique ?

Vincent Ardourel

UCL
Université catholique de Louvain

Contexte de la communication

- Thèse de doctorat : “Les théories physiques face au calcul numérique. Enjeux et conséquences de la mécanique discrète”.

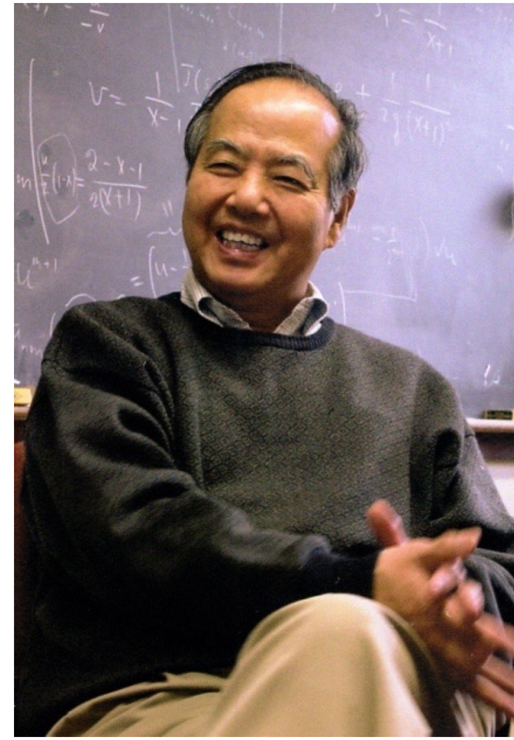
  2013, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, J. Dubucs, A. Barberousse (Dir.)

- Ardourel, V. & Barberousse, A. « The Representation of Time in Discrete Mechanics », dans C. Bouton et P. Huneman (dir.), *Time of Nature, Nature of Time*, Springer. (à paraître)
- Ardourel, V. (2015). A Discrete Solution for the Paradox of Achilles and the Tortoise. *Synthese*, vol. 192 (9), pp. 2843-2861
- Ardourel,V. (2014). La structure du temps est-elle indécidable ? Sous-détermination et structure du temps chez Newton-Smith. *Dialogue*, Cambridge University Press, vol. 53 (4), p. 623-649

Introduction

- Point de départ : développement depuis les années 1980 d'une mécanique discrète (MD)
- T.D. Lee (1983, 1987), D'Innocenzo et al. (1987), Marsden & West (2001), Chen et al. (2006) …
- MD : mécanique computationnelle
- MD : nouvelle théorie variationnelle du mouvement classique qui repose sur des principes discrets
- Hypothèse : MD est une ``bonne'' théorie

Introduction



T.D. Lee (1926 -)

Volume 122B, number 3,4 PHYSICS LETTERS

CAN TIME BE A DISCRETE DYNAMICAL VARIABLE?☆

T.D. LEE
Columbia University, New York, NY 10027, USA

Received 19 November 1982

The possibility that time can be regarded as a discrete dynamical variable is examined through all phases of mechanics from classical mechanics to nonrelativistic quantum mechanics, and to relativistic quantum field theories

« Nous examinons la possibilité de traiter le temps comme une variable dynamique discrète dans toutes les branches de la mécanique: de la mécanique classique à la théorie quantique des champs relativiste en passant par la mécanique quantique non-relativiste.»
(Lee 1983, Abstract)

Introduction

- **Variable privilégiée dans l'exposé : le temps**

- « traiter le temps comme une variable dynamique discrète » (Lee, 1983)

- **Représentation discrète du temps vs. représentation continue du temps**

t vs. t_k

$$t_k = hk \qquad h \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq k < N, N \in \mathbb{N}$$

Plan

- 1. Enjeux du développement de la mécanique discrète
- 2. Des intégrateurs symplectiques à la mécanique discrète
- 3. La mécanique discrète comme théorie physique
- 4. Conséquences épistémologiques
- 5. Simplicité de la mécanique discrète

1. Enjeux du développement de la mécanique discrète (MD)

La MD : une mécanique pour l'ordinateur

- Une des enjeux de la MD : bénéficier de la puissance du calcul sur ordinateur
- → résoudre à l'aide d'ordinateurs des **équations discrètes**
- Pourquoi des équations discrètes ?

→ Le recours au calcul sur ordinateur nécessite un langage discret.

- Pourquoi cet objectif est-il légitime?

→ Les solutions exactes (analytiques) des équations différentielles sont souvent inconnues ou impossibles à connaître.

Equations différentielles sans solution

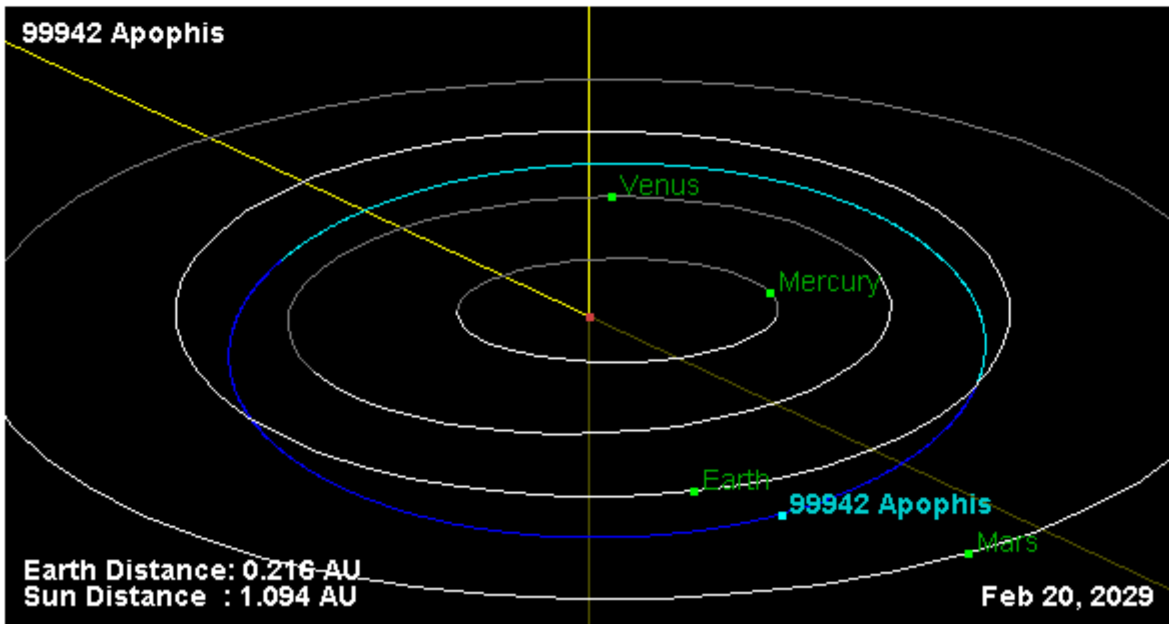
« On raconte que Newton communiqua à Leibniz un anagramme à peu près comme ceci : *aaaaabbbeeeeii*, etc. Leibniz, naturellement, n'y comprit rien du tout ; mais nous qui avons la clef, nous savons que cet anagramme veut dire, en le traduisant dans le langage moderne : "Je sais intégrer toutes les équations différentielles" et nous sommes amenés à nous dire que Newton avait bien de la chance ou qu'il se faisait de singulières illusions.»

Poincaré, *Science et Méthode* (1908), chap 2.

Résolution numérique des équations différentielles

- L'intérêt des résolutions numériques sur ordinateur : prédire des trajectoires

Exemple: les astéroides géocroiseurs



Résolution numérique des équations différentielles

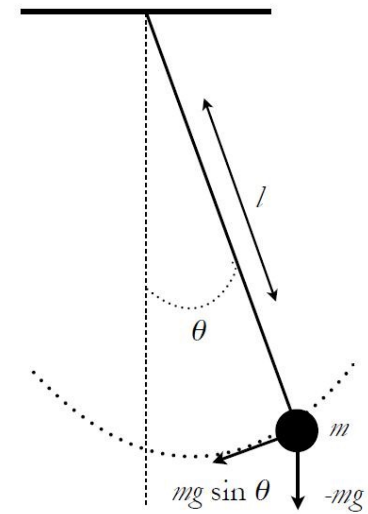
- **Question préliminaire** : comment les équations différentielles sont-elles discrétisées?
- **Réponse**: utilisation d'**intégrateurs numériques** ou méthodes numériques
- Equation différentielle —> équation aux différences
- Exemple : Méthodes d'Euler, méthodes de Runge-Kutta

Différents intégrateurs

- **Exemple** : le pendule simple

  Équations du mouvement (q : angle)

  dq/dt=v et dv/dt=-g/l sinq



- **Méthode d'Euler *forward***

  $dx/dt=y \rightarrow (x_{k+1}-x_k)/h = y_k$

pendule simple :

$(q_{k+1}-q_k)/h = v_k$ et $(v_{k+1}-v_k)/h = -g/l \sin(q_k)$

Différents intégrateurs

- **Méthode d'Euler *backward***

$dx/dt=y \rightarrow (x_{k+1}-x_k)/h = y_{k+1}$

pendule simple :

$(q_{k+1}-q_k)/h = v_{k+1}$ et $(v_{k+1}-v_k)/h = -g/l \sin(q_{k+1})$

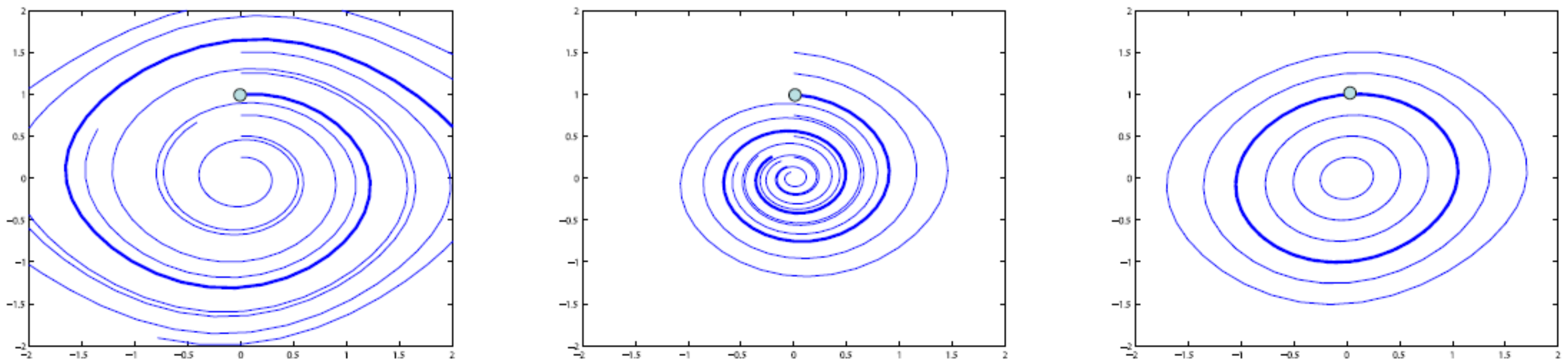
- **Méthode d'Euler symplectique**

pendule simple :

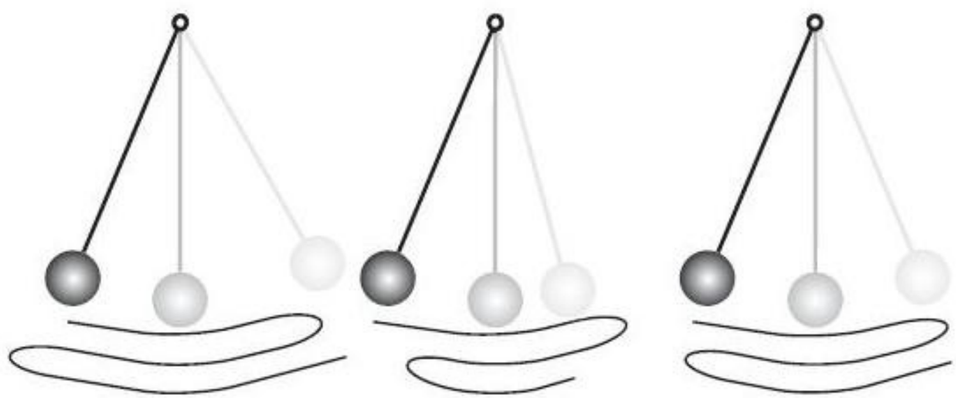
$(q_{k+1}-q_k)/h = v_{k+1}$ et $(v_{k+1}-v_k)/h = -g/l \sin(q_k)$

Comparaison des intégrateurs

Pendule simple (conservatif) (Stern & Desbrun 2008)

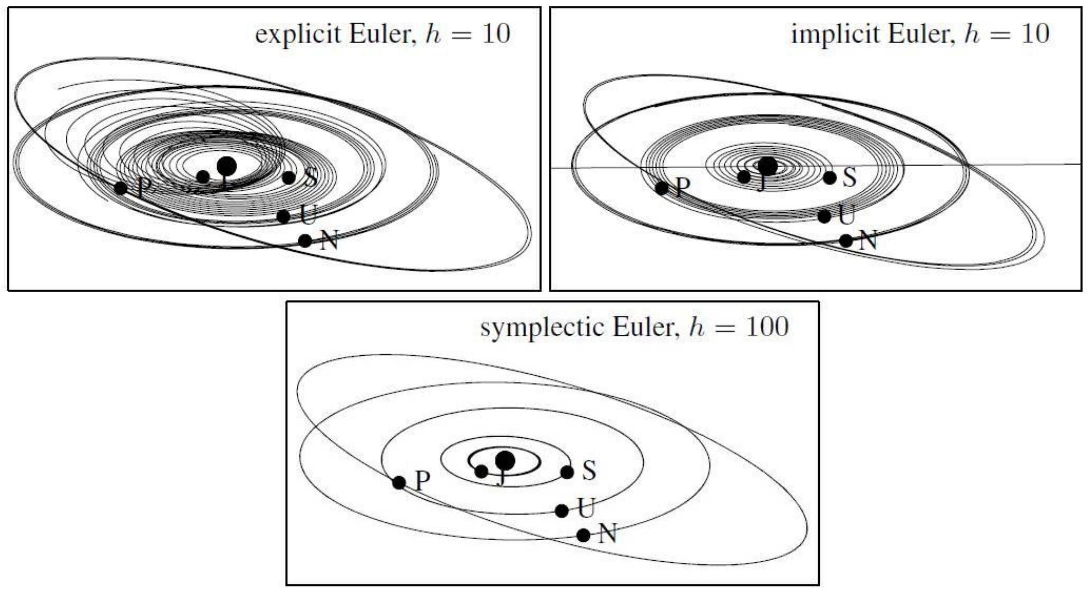


Euler *forward* Euler *backward* Euler *symplectique*



Comparaison des intégrateurs

Système solaire réduit (Hairer et al. 2006)

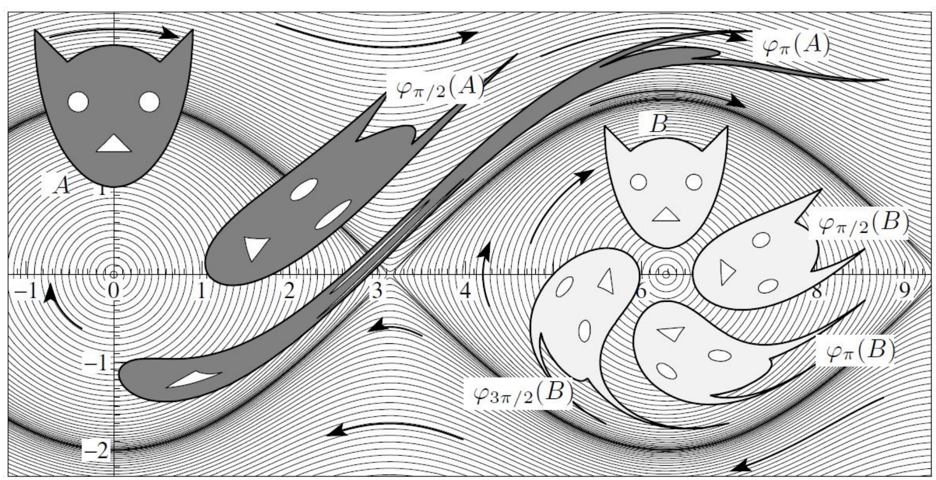


« une intégration sur une période bien plus longue, de l'ordre par exemple de plusieurs millions d'années ne détériore pas ce comportement. » (Hairer et al. 2002, p. 15)

Le critère de symplecticité

- « A la fin des années 1980, Kang Feng a proposé et développé des algorithmes qualifiés de symplectiques pour résoudre les équations. […] Au niveau du comportement à long terme, ces méthodes sont bien supérieures aux méthodes standards. »

  (Peter Lax cité dans (Feng & Qin 2010), p. xi)



2. Des intégrateurs symplectiques à la mécanique discrète

Contexte du développement de la MD

- A l’intersection de deux directions dans la recherche
  - 1) **Théorie Quantique des Champs Discrète**
    (Lee 1983, 1987, Friedberg & Lee 1983)
  - **2) La Construction d’Intégrateurs Numériques**
    (Marsden et al. 2001 etc.)

Principes de la MD

« L'idée directrice qui sous-tend la MD est de tirer profit de la nature variationnelle de la mécanique et de préserver cette structure variationnelle dans un cadre discret. […]

Si l'on construit un équivalent discret du Lagrangien, les équations discrètes du mouvement peuvent facilement en être dérivées […].

En substance, de bonnes méthodes numériques découleront des analogues discrets des équations d'Euler-Lagrange qui dérivent véritablement d'un principe variationnel.»

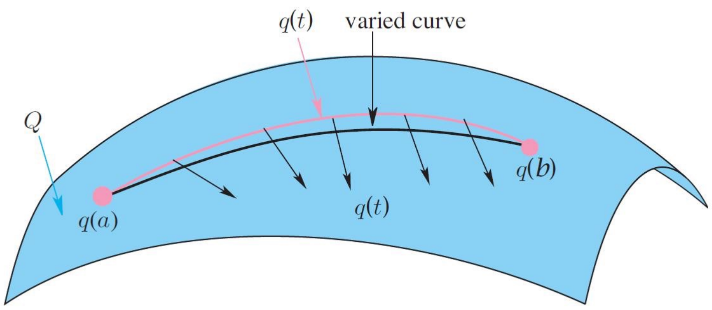
(Stern & Desbrun 2008, p. 79)

Principes de la MD

- Nature variationnelle de la mécanique

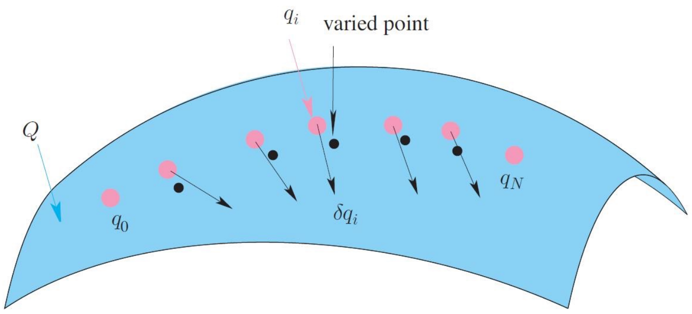
$S = \int L\,dt \rightarrow \delta S = 0$

$\rightarrow$ équations d'Euler-Lagrange



- Idée de la MD :

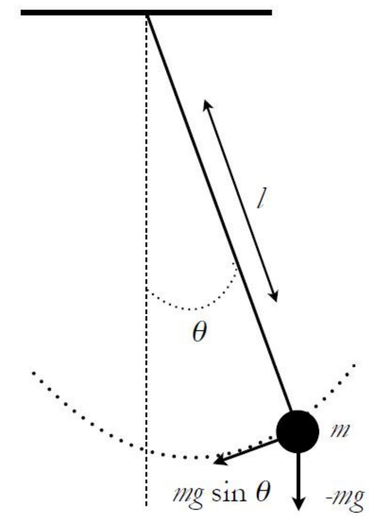
$S_d = \sum L_d\, h \rightarrow \delta S_d = 0$



$\rightarrow$ équations d'Euler-Lagrange discrètes

Principes de la MD

- Exemple : le pendule simple



- Mécanique Lagrangienne (continue)

  $L = 1/2\ ml^2v^2 + mgl\cos(q)$

  $\delta S=0 \rightarrow$ $dq/dt=v$ et $dv/dt=-g/l\ \sin q$

- Mécanique Lagrangienne discrète

  $L_d = 1/2\ ml^2v_k^2 + mgl\cos(q_k)$

  $\delta S_d=0 \rightarrow$ méthode d'Euler symplectique

→ Déduction « naturelle » d'équations discrètes symplectiques

3. La mécanique discrète comme théorie physique

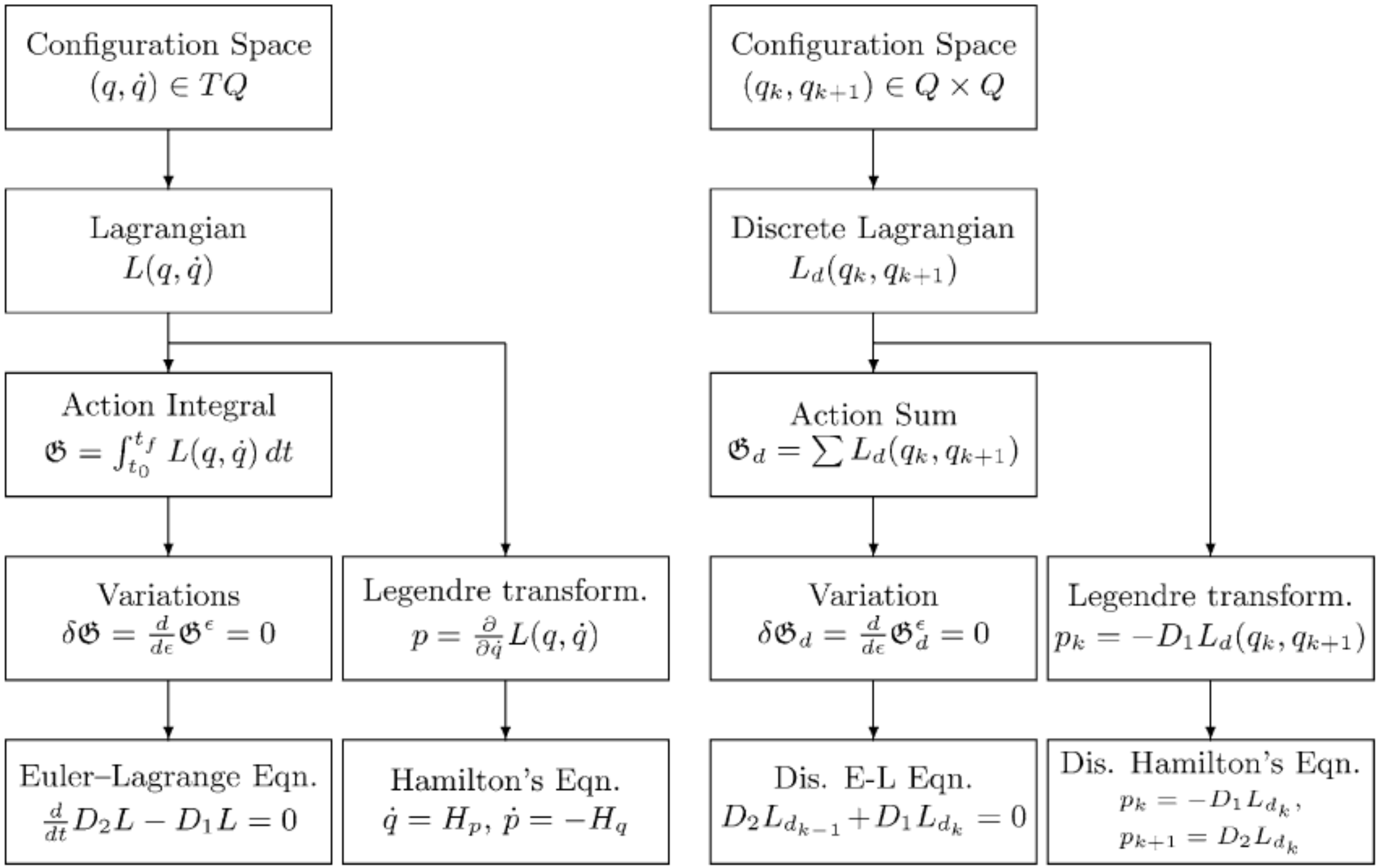
Architecture de la MD

« La mécanique hamiltonienne et lagrangienne discrète a été développée **en reformulant** les théorèmes et les procédures de la mécanique hamiltonienne et lagrangienne avec une **temps discret** (voir par exemple [Marsden et al. 2001]).

Ainsi, la mécanique discrète a une **structure parallèle** à la mécanique décrite en temps continu, comme cela est résumé dans la figure [ci-après] pour la mécanique lagrangienne.»

(Lee et al. 2009, p. 2004)

Architecture de la MD



Lee et al. (2009) : Architecture « parallèle » de la mécanique discrète et de la mécanique continue

Contenu empirique

- Équations d'Euler-Lagrange discrètes

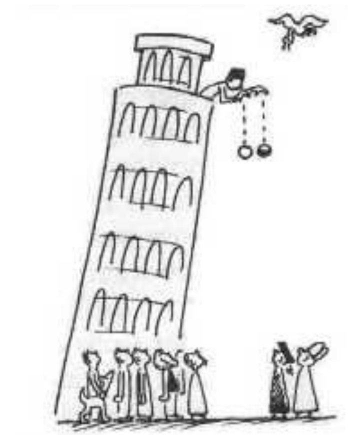
→ interprétées comme décrivant le **mouvement**

- Théorème de Noether : **quantités mathématiques conservées**

→ interprétées comme conservation de la **quantités physiques** : quantité de mouvement discrète, moment cinétique discret etc.

Résolutions exactes de cas d'école

- Cas d'école : particule libre, chute libre, oscillateur harmonique (D'Innocenzo et al. 1987)

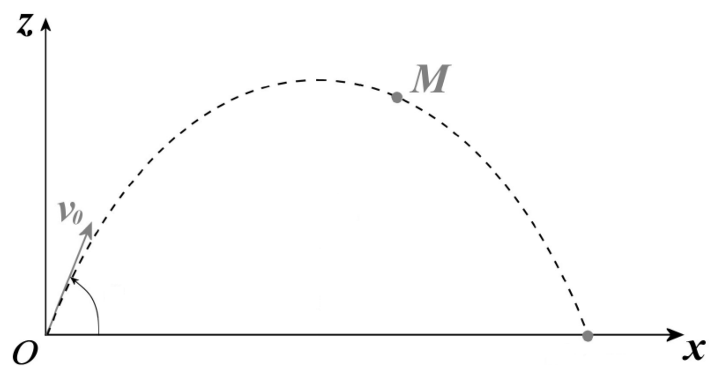


- Exemple : chute libre

$t_k=kh$

$x_k= v_{0,x}t_k +x_0$

$z_k= -(g/2)t_k^2+ (v_{0,z}+gh)t_k +z_0$



Déductions exactes supplémentaires

Equivalence empirique

Pluralité de MD : autant de MD que de **valeurs** pour le **pas de temps h** (plus précisément de valeurs h_0)

Considérons un **appareil de mesure idéal** : résultat de mesure (de positions) x avec une précision ε

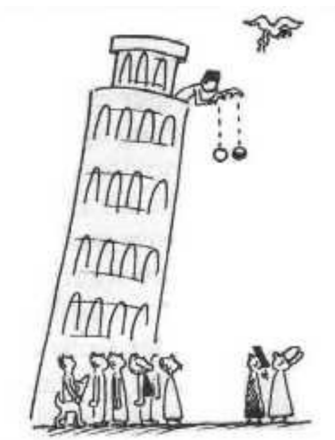
Equivalence empirique : quelle que soit la précision ε, il existe une MD ($h<h_c(\varepsilon)$) pour laquelle la différence entre les solutions des équations des MD et de MC est inférieure à la précision ε.

Repose sur une **équivalence** des équations des MD et de la MC dans **la limite continue** : $h \rightarrow 0$

Equivalence empirique

Exemple : chute libre

Solutions des équations de la MD et MC **suffisamment proches**



Mécanique discrète (MD)	**Mécanique continue (MC)**
$x_k = v_{0,x} t_k + x_0$	$x = v_{0,x} t + x_0$
$z_k = -(g/2) t_k^2 + (v_{0,z} + gh) t_k + z_0$	$z = -(g/2) t^2 + v_{0,z} t_k + z_0$

Équivalence empirique si h est suffisant petit

MD : théorie ou formulation?

- MD: **théorie** discrète **autonome** ou **formulation** discrète de la mécanique classique?
- équivalence empirique + utilisation de la MD pour résoudre des problèmes de MC: arguments en faveur d'une formulation

«La Mécanique Discrète variationnelle est une *formulation* de la mécanique avec un temps discret qui repose sur un analogue discret du principe de Hamilton » (Lee et al. 2009, p. 2001)

- Cependant, l'étude de formulations différentes est légitime : elle nous renseigne sur la manière dont les phénomènes sont représentés.

MD : théorie ou formulation?

- Exemples :

- formulation newtonienne (continue) et formulation hamiltonienne (continue)

→pas les même concepts fondamentaux: force vs. énergie

- Les mécaniques lagrangienne et hamiltonienne (continues) ont des « différences irréconciliables »(North 2009)

→ espaces des états différents : (q,dq/dt) vs. (q,p)

MD : théorie ou formulation?

- **MD et MC : différences irréconciliables**
- concepts fondamentaux différents :
  - Temps : variable dynamique discrète (t_k et h_k)
  - Trajectoire : série finie de points
  - Vitesse : pas un concept premier

    → représentation du mouvement sans notion de vitesse

- **Pas d'équivalence logique** entre MC et MD
  - Prédictions théoriques **logiquement incompatibles**

    exemple, chute libre: $x_d(t) \neq x_c(t)$
  - Absence de bijection entre les espaces des états discrets et les espace des états continus
- Théorie ou formulation?

4. Conséquences épistémologiques de la MD

Equations discrètes et lois fondamentales

- **Recourir à des équations discrètes implique-t-il d'utiliser des équations moins fondamentales?**

- On suppose généralement que les équations différentielles (continues) sont plus fondamentales que les équations aux différences (discrètes).
- Raison : équations aux différences sont des équations approchées déduites des équations différentielles.

- C'est en effet le cas dans les modèles computationnels discrets traditionnels. Les équations aux différences sont issues de la discrétisations d'équations différentielles représentant des modèles spécifiques.

- En revanche, ce n'est pas le cas avec la MD. Les équations aux différences ne sont pas issues de la discrétisation d'équations différentielles spécifiques.

Equations discrètes et lois fondamentales

Un des articles séminaux en MD:

« Depuis plus de trois siècles, nous avons été influencés par le précepte selon lequel les lois fondamentales de la physique devaient être exprimées avec des équations différentielles. Les équations aux différences ont toujours été considérées comme des approximations. Dans ce travail, j'essaie d'explorer la direction opposée : les équations aux différences sont plus fondamentales et les équations différentielles sont considérées comme des approximations. »

(Lee 1987, p. 859)

Equations discrètes : lois fondamentales au sens où elles sont premières et non dérivées d'équations différentielles.

Equations discrètes et continu mathématique

- **Recourir à des équations discrètes implique-t-il de se passer du continu mathématique, i.e des nombres réels ?**
- La réponse est factuelle et simple: non.
- En MD, le temps est représenté par une quantité discrète et appartenant à l'ensemble des nombres réels
- $t_k=kh_k$ où k est un nombre entier et **h_k un nombre réel**
- Il faut distinguer entre : (i) la représentation du temps (discrète/continue) et (ii) le recours aux nombres rationnels/ réels

Equations discrètes et continu mathématique

- Les limites d'une mécanique discrète sans les nombres irrationnels : Mécanique de Greenspan (années 1970 -1990)

- Mécanique newtonienne discrète (1973)

- $ma_k=F_k$

- où a_k=(vk+1-vk)/h et F_k définie comme le gradient discret d'une énergie potentielle discrète (LaBudde &Greenspan 1974)
- conservations des moments, de l'énergie (mais pas symplectique)

Equations discrètes et continu mathématique

- Projet (philosophique) de Greenspan : se passer des nombres irrationnels et plus généralement de l'infini en physique :

- « Le concept d'infini et les concepts de limite, de dérivée et d'intégrale qui en découlent sont légitimes pour l'étude mathématique pure des nombres réels et des fonctions réelles mais ne sont pas légitimes pour la modélisation des concepts et des phénomènes physiques.

  Les équations de la dynamique de nos modèles seront des équations aux différences qui, qu'elles soient linéaires ou non-linéaires, pourront facilement être résolues [sur ordinateurs]. Par conséquent, il est envisageable que si un scientifique est disposé à apprendre le langage simple d'un ordinateur alors il n'aura besoin d'être équipé que d'une connaissance mathématique rudimentaire de l'arithmétique et de l'algèbre pour étudier des phénomènes physiques complexes. »

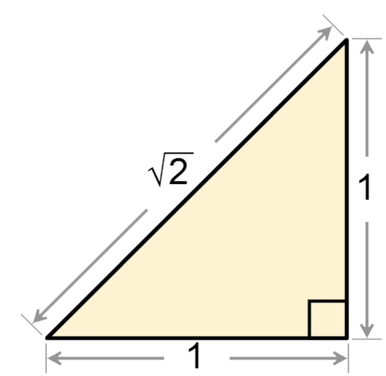
  (Greenspan 1973, chap. 1, introduction)

Equations discrètes et continu mathématique

- Projet de Greenspan se rapproche de certaines propositions de Carnap, Putnam, Newton-Smith:

« Comme les nombres irrationnels résultent toujours d'un calcul et non pas d'une mensuration directe, ne serait-il pas possible en physique d'abandonner entièrement les nombres irrationnels et de travailler avec les seuls nombres rationnels? Ce serait en effet possible, mais le changement serait révolutionnaire. Par exemple, il deviendrait impossible d'utiliser les équations différentielles, parce qu'elles requièrent le continuum des nombres réels »

(Carnap, 1973 [1966], p. 91 et p. 92).



Equations discrètes et continu mathématique

« […] un langage qui quantifie uniquement sur des nombres *rationnels* et qui mesure les distances, les masses, les forces, etc. à l'aide d'approximations rationnelles («la masse de *a* est $m_1 \pm \delta$») *est*, en principe, assez puissant pour *énoncer* au moins la loi de la gravitation »

(Putnam, 1996 [1971], p. 51)

Dans *Philosophie de la logique*, Putnam soutient qu'il existe deux énoncés équivalents de la loi de la gravitation.

Le premier est l'énoncé mathématique traditionnel selon lequel $F = gM_aM_b / d^2$, où F, M_a, M_b et d sont des nombres réels.

Le second est $F_0 = gm_1m_2 / d_1^2$, où F_0, m_1, m_2 et d_1 sont des nombres rationnels

Equations discrètes et continu mathématique

- **Echec du projet de Greenspan** (et des autres) :
- La restriction aux nombres rationnels limite sévèrement, voire, rend impossible résolution exacte des équations discrètes du mouvement
- Par exemple, en mécanique de Newton : $t = \sqrt{(2d / g)}$.
- Si $d = g$, alors $t = \sqrt{2}$. Cette solution n'est pas définie si le paramètre t est un nombre rationnel.
- **Incohérence** du programme de Greenspan

« le continu mathématique sera utilisé seulement pour l'étude de la stabilité où les propriétés sur des ensembles de nombres rationnels peuvent être dérivées plus facilement en considérant ces nombres comme des sous-ensembles d'un système de nombre réels. »

(Greenspan 1973, introduction, p. 2)

Dispensabilité et représentation du temps

- **Thèse : la MD montre que l’on peut se passer de la représentation du temps comme continu en physique.**

  « Pour qu’une entité [ou une représentation] soit dispensable, il faut qu’elle soit éliminable et que la théorie résultant de l’élimination soit aussi une théorie séduisante. » (Colyvan 2011, § 2)

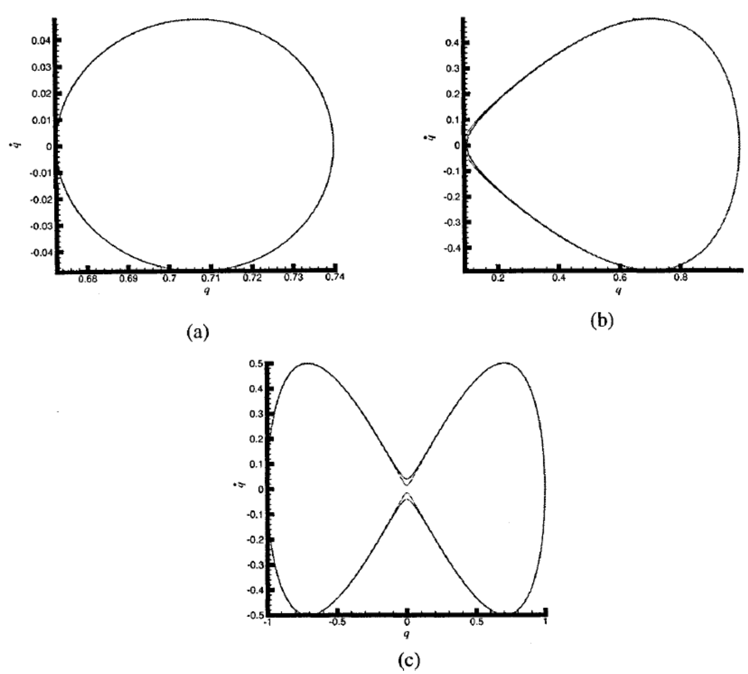
- qu’est-ce qu’être « séduisante » pour une théorie?

  Pas clair selon Colyvan lui-même : succès empirique, de simplicité, de pouvoir explicatif ou encore de fécondité

Je choisis d’être « **utilisable** » par les scientifiques

Dispensabilité et représentation du temps

- La **MD est utilisable**:
- elle permet de décrire, prédire et expliquer des phénomènes
- 1. **Résolutions numériques sur ordinateur**



exemple :

particule dans un double puits de potentiel

(Kane et al. 1999)

Dispensabilité et représentation du temps

- La **MD est utilisable**:

- 2. **Résolutions exactes** (ou analytiques):
  (particule libre, chute libre, oscillateur harmonique)

- oscillateur harmonique : $x_k = A_d \cos(\omega_d\, t_k)+B_d \sin(\omega_d t_k)$

- « Le passage des mathématiques analytiques aux mathématiques numériques [...] a une conséquence immédiate : on perd souvent à la fois la grande **généralité** et l'**exactitude** potentielle des solutions qui ont traditionnellement été désirées dans les théories scientifiques. (Humphreys 2004, p. 64-65) »

5. Simplicité de la mécanique discrète

La MD : une formulation compliquée…

- 1) **Expressions des notions fondamentales** sont **plus longues** en mécanique discrète qu'en mécanique continue

$$L_d\left(q_k, q_{k+1}, t_k, t_{k,k+1}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{q_{k+1}-q_k}{t_{k+1}-t_k}\right)^2 - V\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}\right)$$

$$L_c\left(q, \dot{q}\right) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$$

- 2) **lois fondamentales** sont **plus nombreuses** : la minimisation de l'action discrète conduit à deux équations indépendantes

- 3) **Plusieurs versions** à la mécanique discrète variationnelle

Simplicité calculatoire

- Simplicité du point de vue de la résolution de ses équations
- Prendre en compte les résolutions **exactes** et les résolutions **numériques**
- La **mécanique discrète est plus complexe** que la mécanique continue du point de vue de la **résolution exacte** de ses équations.
- **Peu de cas** d'écoles **explicitement solubles** connus

« Les équations différentielles de la théorie continue [de la mécanique continue] deviennent [en mécanique discrète] des équations aux différences et pour lesquelles, en général, des résolutions numériques sont seulement possibles. » [d'Innocenzo et al. 1987, p. 245]

- **Pour quelles raisons?**
  - Deux équations indépendantes à résoudre
  - Moins de solutions explicites pour les équations aux différences?

Simplicité calculatoire

- La **mécanique discrète est plus simple** que la mécanique continue du point de vue de la **résolution numérique** de ses équations.

- Les équations du mouvement de la MD sont des intégrateurs symplectiques

- Dès lors qu'on utilise un intégrateur symplectique, on a recours, au moins implicitement, à la mécanique discrète.

  « Si une méthode d'intégration numérique est symplectique, alors elle peut être dérivée à partir d'un principe variationnel discret. » [Shibberu 2009, p. 1], citant les travaux de [Wu 1990]

- Relation d'équivalence (et non seulement d'implication) entre la mécanique discrète et les intégrateurs symplectiques

Les difficultés du concept de « vitesse instantanée »

- La vitesse instantanée : notion élémentaire mais complexe
- Notion limite

« Quelle a été la vitesse de ce corps à tel instant précis ? Il ne suffit pas, pour répondre à cette question, de définir la vitesse comme le simple quotient de la distance divisée par le temps écoulé. Nous sommes obligés d'introduire le concept d'une limite de ce quotient, limite dont il se rapproche à mesure que la durée du laps de temps considéré se rapproche de zéro. En d'autres termes, nous devons recourir à ce que l'on appelle en calcul infinitésimal la dérivée »[Carnap 1966, p. 99]

- Notion secondaire par rapport à la vitesse moyenne

Les difficultés du concept de « vitesse instantanée »

- Illustration en didactique des mathématiques (Maggy Schneider)
- **Comment la notion de vitesse instantanée est-elle reçue par des enfants?**

« [N]ous analyserons pourquoi les concepts de vitesse et de débit instantanés pâtissent d'un a priori négatif auprès d'un certain nombre d'élèves. S'attendant inconsciemment à ce que les mathématiques prolongent leur perception première du “monde sensible”, ces élèves leur dénieraient la possibilité de circonscrire avec précision quelque chose qui leur semble échapper jusqu'à un certain point aux sens et aux mesures. À cela s'ajoutent des difficultés d'apprentissage inhérentes au processus de passage à la limite. [Schneider 1992, p. 317]

- **Raisons des difficultés:**
  - un concept de vitesse instantanée qui n'a pas d'équivalent empirique
  - usage fautif de la part des enfants de la notion de limite, v=dx/dt
  - divisibilité à l'infini des intervalles temporels

Divisibilité à l’infini et paradoxe d’Achille

- Le recours à la représentation **continue** du temps: **paradoxe** d’Achille et la tortue

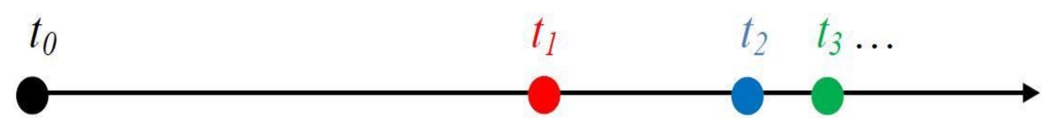
- Avec le recours à la **représentation discrète du temps**: le **paradoxe** d’Achille et la tortue est **dissipé.**

Divisibilité à l'infini et paradoxe d'Achille

Raisonnement de Zénon en représentation continue

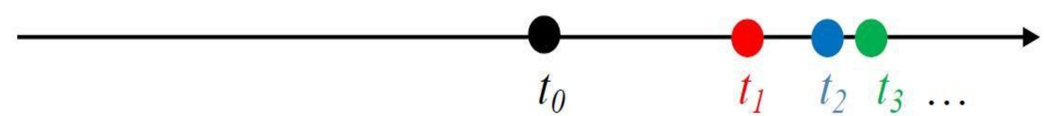
$$x_A = v_A t \qquad\qquad x_T = v_T t + x_0$$

Achille



$$x_A(t_n) = x_T(t_{n-1})$$

La tortue



Position relative d'Achille et la tortue:

$$x_{A/T} = v_r t_n - x_0 \qquad\qquad x_{A/T} = -x_0 \left(\frac{v_T}{v_A} \right)^n$$

Divisibilité à l’infini et paradoxe d’Achille

Suite géométrique convergente et supertasks

« La série des distances traversées par Achille est convergente. Cela signifie que si Achille effectue suffisamment de pas suivant la série 100 yards, 10 yards, 1 yard, 1/10 yard, etc. la distance restant encore à parcourir pour atteindre le point de rencontre devient et reste aussi petite que l’on veut. [...]
Mais la distance, bien que plus réduite, reste toujours à parcourir ; et après chaque pas il reste encore une infinité de pas à faire. La difficulté logique est qu’Achille semble devoir accomplir une série infinie de tâches ; et dire que les tâches deviennent de plus en plus faciles ou requièrent de moins en moins de temps ne change rien au problème. [...]
La difficulté logique ne concerne pas l’étendue de la distance qu’Achille doit parcourir mais l’impossibilité apparente de son parcours quelle qu’en soit la distance. » [Black 1951] repris dans [Salmon 1970, p. 70-71]

Divisibilité à l’infini et paradoxe d’Achille

- **Solution en mécanique discrète** (Ardourel 2015)
- En représentant le temps comme discret, le raisonnement de Zénon ne conduit plus à la conclusion selon laquelle Achille ne dépasse jamais la tortue

Temps: $t_k = hk \qquad h \in \mathrm{R} \qquad 0 \leq k < N, N \in \mathrm{N}$

Vitesse: $$v_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$$

Positions d’Achille et de la tortue:

$$x_A(t_k) = v_A t_k \qquad x_T(t_k) = v_T t_k + x_0$$

Divisibilité à l'infini et paradoxe d'Achille

- **Raisonnement de Zénon en représentation discrète**

$$x_A(t_{k_1}) \geq x_T(t_{k_0})$$

$$x_{A/T}(t_{k_n}) = v_r t_{k_n} - x_0$$

$$\underbrace{v_r h + v_r h + \dots v_r h}_{k_m \text{ terms}} \geq x_0$$

Divisibilité à l’infini et paradoxe d’Achille

- Exemple: $v_A=2$, $v_T=1$, $x_0=1$, $h=10^{-5}$

Step i of Zeno’s argument	k_i	instant t_{k_i}	Achilles $x_A(t_{k_i})$	the tortoise $x_T(t_{k_i})$	distance remaining Δ_n
0	0	0	0	1	1
1	50,000	0.50000	1.00000	1.50000	0.50000
2	75,000	0.75000	1.50000	1.75000	0.25000
3	87,500	0.87500	1.75000	1.87500	0.12500
4	93,750	0.93750	1.87500	1.93750	0.06250
5	96,875	0.96875	1.93750	1.96875	0.03125
6	98,438	0.98438	1.96876	1.98438	0.01562
7	99,219	0.99219	1.98438	1.99219	0.00781
8	99,610	0.99610	1.99220	1.99610	0.00390
9	99,805	0.99805	1.99610	1.99805	0.00195
10	99,903	0.99903	1.99806	1.99903	0.00097
11	99,952	0.99952	1.99904	1.99952	0.00048
12	99,976	0.99976	1.99952	1.99976	0.00024
13	99,988	0.99988	1.99976	1.99988	0.00012
14	99,994	0.99994	1.99988	1.99994	0.00006
15	99,997	0.99997	1.99994	1.99997	0.00003
16	99,999	0.99999	1.99998	1.99999	0.00001
17	100,000	1.00000	2.00000	2.00000	0.00000

Divisibilité à l’infini et paradoxe d’Achille

- **Equivalence empirique**

- Comparons les différences entre les séries des positions d’Achilles avec un temps continu et un temps discret:

- $\delta x = \max|x_n - x_{k_n}|$ $\delta x \leq h v_A/(1 - v_T/v_A)$

- **équivalence empirique:** pour n’importe quelle précision de mesure ε fixée, vitesses d’Achille et de la tortue fixées, il faut choisir un pas de temps h tel que: $\mathbf{h < (\varepsilon/v_A)(1 - v_T/v_A)}$.

Conclusion

- Question initiale: “Peut-on se passer des variables continues en physique?”
- Tentative de réponse affirmative à travers l’examen de la mécanique discrète
- Plan de l’exposé:
- 1. Enjeux du développement de la mécanique discrète
- 2. Des intégrateurs symplectiques à la mécanique discrète
- 3. La mécanique discrète comme théorie physique
- 4. Conséquences épistémologiques
- 5. Simplicité de la mécanique discrète

Bibliographie indicative

- Ardourel, V. (2015). A Discrete Solution for the Paradox of Achilles and the Tortoise. *Synthese*, vol. 192 (9), pp. 2843-2861
- Ardourel,V. (2014). La structure du temps est-elle indécidable ? Sous-détermination et structure du temps chez Newton-Smith. *Dialogue*, Cambridge University Press, vol. 53 (4), p. 623-649
- Ardourel, V. & Barberousse, A. « The Representation of Time in Discrete Mechanics », dans C. Bouton et P. Huneman (dir.), *Time of Nature, Nature of Time,* Springer. (à paraître)
- Carnap, R. (1973). *Les fondements philosophiques de la physique*, Paris, Armand Colin.
- Chen, J.B., Guo, H.Y., Wu, K. (2006). Discrete Total Variation Calculus and Lee's Discrete Mechanics. *Applied Mathematics and Computation*, 177, 226–234.
- Corless et al. (1991). Numerical Methods Can Suppress Chaos, *Physics Letters A, 157 (1), p. 27-36.*
- D'Innocenzo et al. (1987) Some Studies in Discrete Mechanics, *European Journal of Physics*, 8, p. 245-252.
- Friedberg, R., Lee, T. D. (1983). Discrete Quantum Mechanics. Nuclear Physics, B225, [FS9], 1–52.
- Gawlik, et al. (2011) *Geometric, variational discretization of continuum theories.* Physica D, 240 (21). pp. 1724-1760.
- Lee, T. D. (1983). Can Time Be a Discrete Dynamical Variable?. Physics Letters, 122B (3–4), 217–220.
- Lee, T. D. (1987). Difference Equations and Conservation Laws. Journal of Statistical Physics, 46 (5-6), 843–860
- Lee, T., Leok, M. & McClamroch, H. (2009). Discrete Control Systems. In Robert A. Meyer (Ed.). Encyclopedia of Complexity and Systems Science. New York: Springer, 2002–2019.
- Lew, A., Marsden J.E., Ortiz M., West, M. (2003). An Overview of Variational Integrators. In Franca L.P. (Ed.) Finite Element Methods : 1970's and Beyond, Barcelona: CIMNE, 1–18.
- Marsden *et al*. (2001), Discrete Mechanics and Variational Integrators, *Acta Numerica*, p. 357-515.
- Newton-Smith, W. (1980), The Structure of Time, Londres, Routledge & Kegan Paul.
- Putnam, H. (1996), Philosophie de la logique, Combas, l'Éclat
- Stern, A. (2009), *Geometric discretization of Lagrangian mechanics and field theories*. Ph.D. thesis, California Institute of Technology.